Συνοπτική Θεωρία

Μαθηματικά της Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών
Β Λυκείου

Νικόλαος Τύμης
ΔΙΑΠΟΛ 2024-25

Περιεχόμενα

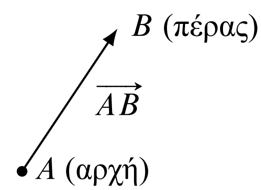
1 Διάνυσμα

1.1 Η έννοια του διανύσματος

Βασικοί ορισμοί.

- **Μονόμετρα** ή **βαθμωτά** μεγέθη ονομάζονται τα μεγέθη που προσδιορίζονται από το μέτρο τους και από την αντίστοιχη μονάδα μέτρησης, *π.χ. η μάζα, ο όγκος, η πυκνότητα, η θερμοκρασία κτλ.*
- **Διανυσματικά** μεγέθη ή απλώς **διανύσματα** ονομάζονται τα μεγέθη που για να τα προσδιορίσουμε, εκτός από το μέτρο τους και τη μονάδα μέτρησης, χρειαζόμαστε τη διεύθυνση και τη φορά τους, *π.χ. η δύναμη, η ταχύτητα, η επιτάχυνση κτλ.*

- Στη Γεωμετρία **το διάνυσμα ορίζεται ως ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα**, δηλαδή ως ένα ευθύγραμμο τμήμα του οποίου τα άκρα θεωρούνται διατεταγμένα. Το πρώτο άκρο λέγεται **αρχή** του διανύσματος, ενώ το δεύτερο λέγεται **πέρας** του διανύσματος.

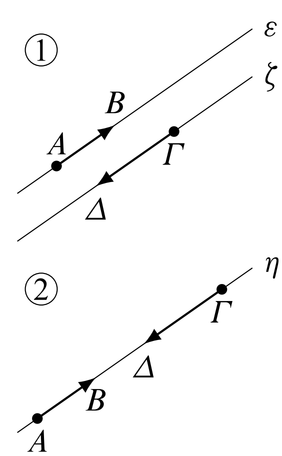


- Αν η αρχή και το πέρας ενός διανύσματος συμπίπτουν, τότε το διάνυσμα λέγεται **μηδενικό διάνυσμα** (και συμβολίζεται με $\overrightarrow{0}$), δηλαδή $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$.
- Η απόσταση των άκρων ενός διανύσματος $\overrightarrow{AB}$, δηλαδή το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB, λέγεται **μέτρο** ή **μήκος** του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ και συμβολίζεται με $|\overrightarrow{AB}|$.
- Αν $|\overrightarrow{AB}| = 1$, τότε το $\overrightarrow{AB}$ λέγεται **μοναδιαίο διάνυσμα**.

Παράλληλα διανύσματα.

- Η ευθεία ε πάνω στην οποία βρίσκεται ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ λέγεται **φορέας** του $\overrightarrow{AB}$ (δες σχ. 1).
- Αν ο φορέας ενός διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ είναι παράλληλος ή συμπίπτει με μια ευθεία ζ, τότε λέμε ότι το $\overrightarrow{AB}$ είναι **παράλληλο** προς τη ζ και γράφουμε $\overrightarrow{AB} // \zeta$ (και $\overrightarrow{AB} // \varepsilon$ στο σχ. 1).
- Δύο μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, που έχουν τον ίδιο φορέα (σχ. 2) ή παράλληλους φορείς (σχ. 1), λέγονται **παράλληλα ή συγγραμμικά** διανύσματα. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι τα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ έχουν **ίδια διεύθυνση** και γράφουμε

$$\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{\Gamma\Delta}.$$

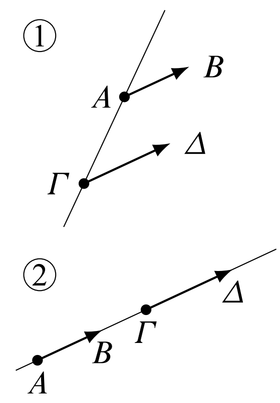


Ομόρροπα διανύσματα.

Δύο μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ λέγονται **ομόρροπα**:

(1) όταν έχουν παράλληλους φορείς και βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία $A\Gamma$ που ενώνει τις αρχές τους ή

(2) όταν έχουν τον ίδιο φορέα και μία από τις ημιευθείες AB και $\Gamma\Delta$ περιέχει την άλλη.



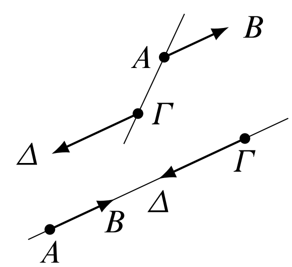
Στις περιπτώσεις αυτές λέμε ότι τα $\overrightarrow{AB}$ και έχουν την **ίδια κατεύθυνση** (ίδια διεύθυνση και ίδια φορά) και γράφουμε

$$\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{\Gamma\Delta}.$$

Αντίρροπα διανύσματα.

Δύο μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ λέγονται **αντίρροπα**, όταν είναι συγγραμμικά και δεν είναι ομόρροπα. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ έχουν **αντίθετη κατεύθυνση** (ίδια διεύθυνση και αντίθετη φορά) και γράφουμε

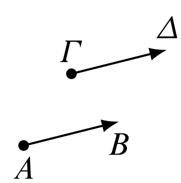
$$\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{\Gamma\Delta}.$$



Ίσα διανύσματα.

Δύο μη μηδενικά διανύσματα λέγονται **ίσα** όταν έχουν την **ίδια κατεύθυνση και ίσα μέτρα**. Για να δηλώσουμε ότι δύο διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ είναι ίσα, γράφουμε

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}.$$



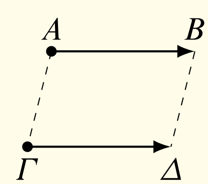
Τα μηδενικά διανύσματα θεωρούνται ίσα μεταξύ τους και συμβολίζονται με $\vec{0}$.

Ιδιότητα παραλληλογράμμου. Αν $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$, τότε

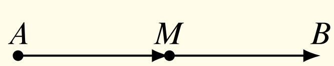
(1) $\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{B\Delta}$,

(2) $\overrightarrow{\Gamma A} = \overrightarrow{\Delta B}$,

(3) $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{\Delta\Gamma}$.

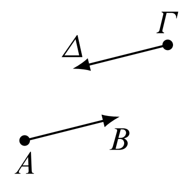


Ιδιότητα μέσου. Αν M είναι το μέσον του AB, τότε $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ και αντιστρόφως.



Αντίθετα διανύσματα.

Δύο μη μηδενικά διανύσματα λέγονται **αντίθετα** όταν έχουν **αντίθετη κατεύθυνση και ίσα μέτρα**. Για να δηλώσουμε ότι δύο διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\varGamma\varDelta}$ είναι αντίθετα, γράφουμε



$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{\varGamma\varDelta} \quad \text{ή} \quad \overrightarrow{\varGamma\varDelta} = -\overrightarrow{AB}.$$

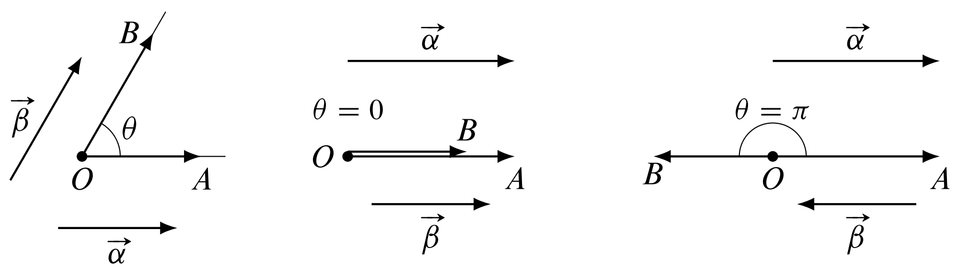
Είναι φανερό ότι

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{\varGamma\varDelta} \iff \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\varDelta\varGamma}.$$

Ειδικότερα, έχουμε

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}.$$

Γωνία δύο διανυσμάτων.



Έστω δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Με αρχή ένα σημείο O παίρνουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$. Την κυρτή γωνία $A\hat{O}B$, που ορίζουν οι ημιευθείες OA και OB, την ονομάζουμε γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ και τη συμβολίζουμε με

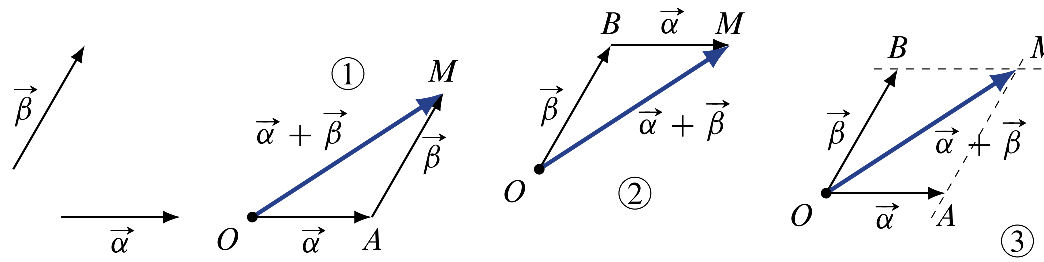
$$\theta = (\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) \quad \text{ή} \quad \theta = (\widehat{\vec{\beta},\vec{\alpha}})$$

Είναι φανερό ότι

$$0^\circ \le \theta \le 180^\circ \quad \text{ή (σε ακτίνια)} \quad 0 \le \theta \le \pi.$$

Επίσης
(1) $\theta = 0$ αν $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$,
(2) $\theta = \pi/2$ αν $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$,
(3) $\theta = \pi$ αν $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$.

1.2 Πρόσθεση και αφαίρεση διανυσμάτων



Έστω $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δύο διανύσματα, και O ένα οποιοδήποτε σημείο του χώρου. Το **άθροισμα ή συνισταμένη** των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ορίζεται ως

$$\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\overrightarrow{OM},$$

όπου το σημείο M προσδιορίζεται με έναν από τους ακόλουθους ισοδύναμους τρόπους:

(1) Με αρχή το σημείο O παίρνουμε διάνυσμα $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$ και στη συνέχεια με αρχή το A παίρνουμε διάνυσμα $\overrightarrow{AM}=\vec{\beta}$.

(2) Με αρχή το σημείο O παίρνουμε διάνυσμα $\overrightarrow{OB}=\vec{\beta}$ και στη συνέχεια με αρχή το B παίρνουμε διάνυσμα $\overrightarrow{BM}=\vec{\alpha}$.

(3) (*κανόνας παραλληλογράμμου*) Με αρχή το σημείο O παίρνουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB}=\vec{\beta}$ και στη συνέχεια (φέροντας παράλληλες) βρίσκουμε σημείο M τέτοιο ώστε $OAMB$ παραλληλόγραμμο (με OM διαγώνιο).

Αποδεικνύετε ότι ο ορισμός του αθροίσματος $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ είναι ανεξάρτητος της επιλογής του σημείο O, δηλαδή η πράξη της πρόσθεσης είναι καλά ορισμένη, και μάλιστα ισχύουν όλες οι γνωστές ιδιότητες του αθροίσματος:

(1) $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\vec{\beta}+\vec{\alpha}$,

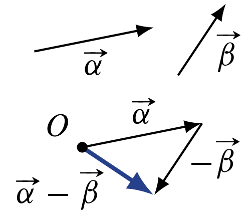
(2) $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma}=\vec{\alpha}+(\vec{\beta}+\vec{\gamma})$,

(3) $\vec{\alpha}+\vec{0}=\vec{\alpha}$,

(4) $\vec{\alpha}+(-\vec{\alpha})=\vec{0}$.

Η **διαφορά** $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ του διανύσματος $\vec{\beta}$ από το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ ορίζεται ως άθροισμα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $-\vec{\beta}$, δηλαδή

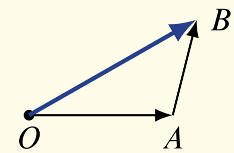
$$\vec{\alpha}-\vec{\beta}=\vec{\alpha}+(-\vec{\beta}).$$



Διάνυσμα θέσης. Έστω O ένα σταθερό σημείο του χώρου. Τότε για κάθε σημείο M του χώρου ορίζεται το διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$ το οποίο λέγεται διάνυσμα θέσεως του M ή **διανυσματική ακτίνα** του M. Το σημείο O, που είναι η κοινή αρχή όλων των διανυσματικών ακτίνων των σημείων του χώρου, λέγεται **σημείο αναφοράς** στο χώρο.

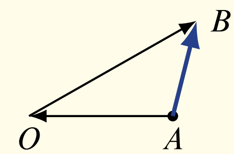
Αν A, B είναι σημεία του χώρου, τότε για το σημείο αναφοράς O, έχουμε

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}. \tag{1}$$



Κάθε διάνυσμα στο χώρο είναι ίσο με τη διανυσματική ακτίνα του πέρατος μείον τη διανυσματική ακτίνα της αρχής

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \tag{2}$$



Ανισοτική σχέση μέτρου αθροίσματος διανυσμάτων:

$$|\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}| \tag{3}$$

1.3 Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα

Ιδιότητες:
(1) $\lambda(\vec{\alpha}+\vec{\beta})=\lambda\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}$
(2) $(\lambda+\mu)\vec{\alpha}=\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\alpha}$
(3) $\lambda(\mu\vec{\alpha})=(\lambda\mu)\vec{\alpha}$

Ως συνέπεια του ορισμού του γινομένου αριθμού με διάνυσμα και των παραπάνω ιδιοτήτων έχουμε:
(i) $\lambda\vec{\alpha}=\vec{0}\Leftrightarrow\lambda=0$ ή $\vec{\alpha}=\vec{0}$.
(ii) $(-\lambda\vec{\alpha})=\lambda(-\vec{\alpha})=-(\lambda\vec{\alpha})$.
(iii) $\lambda(\vec{\alpha}-\vec{\beta})=\lambda\vec{\alpha}-\lambda\vec{\beta}$.
(iv) $(\lambda-\mu)\vec{\alpha}=\lambda\vec{\alpha}-\mu\vec{\alpha}$.
(v) Αν $\lambda\vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta}$ και $\lambda\neq 0$, τότε $\vec{\alpha}=\vec{\beta}$.
(vi) Αν $\lambda\vec{\alpha}=\mu\vec{\alpha}$ και $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$, τότε $\lambda=\mu$.

Κάθε διάνυσμα της μορφής $\vec{\gamma}=\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}$, όπου $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ ονομάζεται **γραμμικός συνδυασμός** των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

Συνθήκη παραλληλίας διανυσμάτων. Αν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι δύο διανύσματα με $\vec{\beta}\neq\vec{0}$, τότε

$$\vec{\alpha}//\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta},\quad \lambda\in\mathbb{R}. \tag{4}$$

Ειδικότερα, για $\lambda\neq 0$, έχουμε

$$\vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta}\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}\ (\text{ομόρροπα}) & \lambda>0,\\ \vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}\ (\text{αντίρροπα}) & \lambda<0.\end{cases}$$

Διανυσματική ακτίνα μέσου τμήματος. Ας πάρουμε ένα διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ και ένα σημείο αναφοράς O. Για τη διανυσματική ακτίνα $\overrightarrow{OM}$ του μέσου M του τμήματος AB έχουμε:

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}) \tag{5}$$

1.4 Συντεταγμένες στο επίπεδο

Οι συντεταγμένες ενός σημείου M συμπίπτουν με τις συντεταγμένες του διανύσματος θέσης $\overrightarrow{OM}$. Δηλαδή

$$M(x, y) \Longleftrightarrow \overrightarrow{OM} = (x, y) \tag{6}$$

Συντεταγμένες διανύσματος

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$
$$\lambda(x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1)$$

Αν Θεωρήσουμε δύο σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ του καρτεσιανού επιπέδου τότε η διανυσματική ακτίνα του μέσου τους είναι

$$\overrightarrow{OM} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) \tag{7}$$

ενώ το διάνυσμα με αρχή το A και πέρας το B έχει συντεταγμένες

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) \tag{8}$$

Μέτρο διανύσματος

Αν $\vec{\alpha} = (x, y)$ τότε

$$|\vec{\alpha}| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{9}$$

Η απόσταση των σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ συμβολίζεται με (AB) και είναι ίση με

$$(AB) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{10}$$

Συνθήκη παραλληλίας διανυσμάτων Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ τότε η ορίζουσα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι η ποσότητα

$$\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

$$\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0 \tag{11}$$

Συντελεστής διεύθυνσης διαστήματος Γωνία ϕ ενός διανύσματος $\vec{\alpha}$ ορίζουμε τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ με τον άξονα $x'x$. Εάν γνωρίζουμε τις συντεταγμένες ενός διανύσματος, τότε μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε τη γωνία του. Συγκεκριμένα:

Αν ϕ είναι η γωνία του διανύσματος $\vec{\alpha} = (x, y)$, τότε

$$\text{εφ}\,\phi = \frac{y}{x}. \tag{12}$$

Η παραπάνω ποσότητα ονομάζεται συντελεστής διεύθυνσης του διανύσματος $\vec{\alpha}$ και συμβολίζεται με $\lambda_{\vec{\alpha}}$ η πιο απλά με λ. Επομένως

$$\lambda = \text{εφ}\,\phi = \frac{y}{x}. \tag{13}$$

1.5 Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

Ονομάζουμε εσωτερικό γινόμενο δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ και το συμβολίζουμε με $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ τον πραγματικό αριθμό

$$\vec{a} \cdot \vec{\beta} = |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|\,\text{συν}\,\phi \tag{14}$$

όπου ϕ η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

- Αν $\vec{\alpha} = \vec{0}$ ή $\vec{\beta} = \vec{0}$, τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$.
- Αν $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$.
- Αν $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| > 0$.
- Αν $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| < 0$.

Αναλυτική έκφραση εσωτερικού γινομένου

Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι ίσο με το άθροισμα των γινομένων των ομώνυμων συντεταγμένων τους. Δηλαδή αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$, τότε

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_1 x_2 + y_1 y_2 \tag{15}$$

2 Η ευθεία στο επίπεδο

2.1 Εξίσωση ευθείας

- Η εξίσωση $x = a$, $a \in \mathbb{R}$, αναπαριστά μια **ευθεία κάθετη** στον άξονα $x'x$.
- Για μια οποιαδήποτε άλλη ευθεία, που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\phi \neq 90°$, ορίζεται ο **συντελεστής διεύθυνσης** $\lambda = \text{εφ}\,\phi$.

Κλασική εξίσωση ευθείας. Μια ευθεία που περνά από το $A(x_0, y_0)$ και δεν τέμνει κάθετα τον άξονα $x'x$, άρα έχει συντελεστή διεύθυνσης λ, έχει εξίσωση της μορφής

$$\varepsilon\colon\ y - y_0 = \lambda(x - x_0). \tag{1}$$

Ο συντελεστής διεύθυνσης λ μιας ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$, με $x_1 \neq x_2$, είναι

$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{2}$$

$$\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \iff \lambda_1 = \lambda_2 \qquad \text{και} \qquad \varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \iff \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1 \tag{3}$$

2.2 Γενική μορφή εξίσωσης ευθείας

Θεώρημα. Κάθε ευθεία του επιπέδου έχει εξίσωση της μορφής

$$\varepsilon\colon\ Ax + By + \Gamma = 0, \quad A \neq 0 \text{ ή } B \neq 0, \tag{4}$$

και αντιστρόφως, κάθε εξίσωση της μορφής (4) παριστάνει ευθεία γραμμή. Επίσης,

$$\varepsilon // \vec{\delta} = (B, -A) \qquad \text{και} \qquad \varepsilon \perp \vec{n} = (A, B) \tag{5}$$

2.3 Εμβαδόν τριγώνου

Η απόσταση ενός σημείου $M_0(x_0, y_0)$ από την ευθεία (ε) της μορφής (4) είναι ίση με

$$d(M_0, \varepsilon) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \tag{6}$$

Εμβαδόν τριγώνου: $$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma})| \tag{7}$$

3 Κωνικές τομές

3.1 Ο κύκλος

Ένας **κύκλος** ακτίνας ρ και με κέντρο την αρχή των αξόνων $(0, 0)$ έχει εξίσωση

$$x^2 + y^2 = \rho^2.$$

Η εφαπτομένη του παραπάνω κύκλου στο σημείο $A(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση

$$xx_1 + yy_1 = \rho^2.$$

Πιο γενικά, ένας κύκλος ακτίνας ρ και κέντρο $K(x_0, y_0)$ έχει εξίσωση

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2. \tag{1}$$

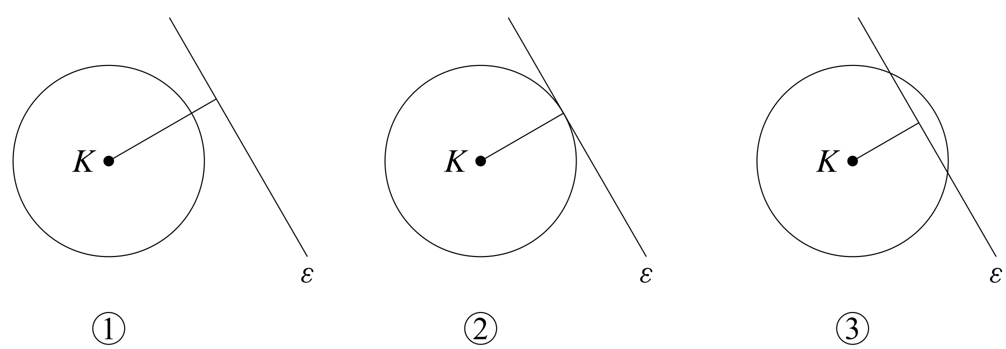
Κάθε κύκλος έχει εξίσωση της μορφής

$$x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0, \quad \text{με } A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0 \tag{2}$$

και αντιστρόφως κάθε εξίσωση της μορφής (2) παριστάνει κύκλο με κέντρο και ακτίνα

$$K\Big(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\Big) \quad \text{και} \quad \rho = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}, \quad \text{αντίστοιχα.}$$

Σχετική θέση ευθείας κύκλου. Έστω C κύκλος ακτίνας ρ και κέντρου $K(x_0, y_0)$, ε μια ευθεία, και $d = d(K, \varepsilon)$ η απόσταση του κέντρου του κύκλου από την ευθεία.
(1) Αν $d > \rho$, ο κύκλος και η ευθεία δεν έχουν κοινά σημεία.
(2) Αν $d = \rho$, η ευθεία εφάπτεται του κύκλου.
(3) Αν $d < \rho$, η ευθεία τέμνει τον κύκλο σε δύο σημεία.



3.2 Η παραβολή

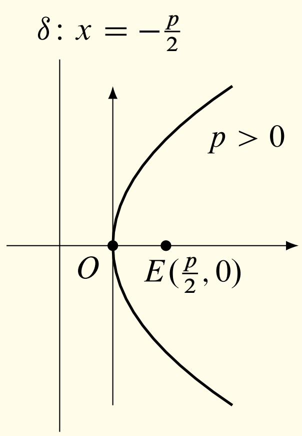
Έστω μια ευθεία δ και ένα σημείο E εκτός της δ. Ονομάζουμε **παραβολή** τον γεωμετρικό τόπο των σημείων του επιπέδου τα οποία ισαπέχουν από το E και τη δ. Το σημείο E ονομάζεται **εστία** και η ευθεία δ ονομάζεται **διευθετούσα**.

Η εξίσωση της παραβολής με εστία $E(\frac{p}{2}, 0)$ και διευθετούσα $\delta\colon x = -\frac{p}{2}$:

$$y^2 = 2px.$$

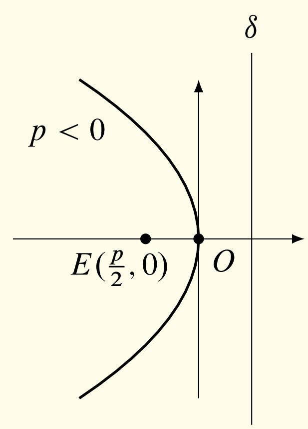
Ο αριθμός p λέγεται παράμετρος της παραβολής και η $|p|$ παριστάνει την απόσταση της εστίας από τη διευθετούσα. Η εφαπτομένη της παραπάνω παραβολής στο σημείο $M(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση

$$yy_1 = p(x + x_1).$$



εξίσωση παραβολής:
$y^2 = 2px$

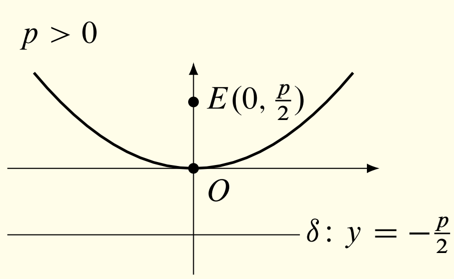
εφαπτομένη στο $M(x_1, y_1)$:
$yy_1 = p(x + x_1)$

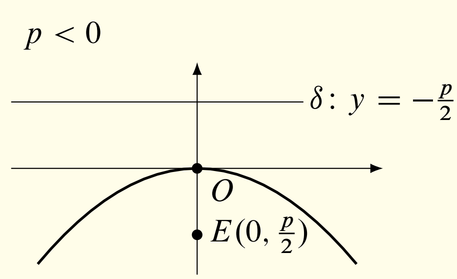


Η εξίσωση της παραβολής με εστία $E(0, \frac{p}{2})$ και διευθετούσα $\delta\colon y = -\frac{p}{2}$ είναι

$$x^2 = 2py,$$

με εφαπτομένη στο $M(x_1, y_1)$: $\qquad xx_1 = p(y + y_1)$.





3.3 Η έλλειψη

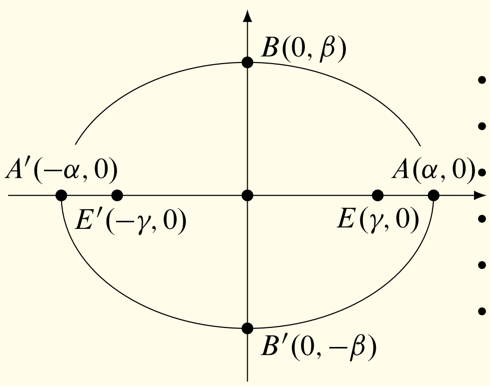
Έστω E' και E δύο σημεία ενός επιπέδου. Ονομάζουμε **έλλειψη** με εστίες τα σημεία E' και E τον γεωμετρικό τόπο των σημείων του επιπέδου των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από τα E' και E είναι σταθερό και μεγαλύτερο του $(E'E)$. Το σταθερό αυτό άθροισμα το συμβολίζουμε, συνήθως με 2α και την απόσταση των εστιών E' και E (εστιακή απόσταση) με 2γ.

Η εξίσωση της έλλειψης με εστίες στον άξονα $x'x$:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \quad \text{όπου } \beta = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}$$

Εξίσωση εφαπτομένης στο σημείο $M(x_1, y_1)$:

$$\frac{xx_1}{\alpha^2} + \frac{yy_1}{\beta^2} = 1.$$



- Σταθερό άθροισμα: $(ME') + (ME) = 2\alpha$.
- **Εστιακή απόσταση**: $(E'E) = 2\gamma$.
- Κορυφές της έλλειψης A', A, B', B.
- Μεγάλος άξονας $A'A$, με $(A'A) = 2\alpha$.
- Μικρός άξονας $B'B$, με $(B'B) = 2\beta$.
- **Εκκεντρότητα** $\epsilon = \gamma/\alpha$.

Όταν οι εστίες της έλλειψης βρίσκονται στον άξονα $y'y$, τότε η εξίσωση της δίνεται ως εξής

$$\frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1, \quad \text{όπου } \beta = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2},$$

ενώ η εξίσωση εφαπτομένης στο σημείο $M(x_1, y_1)$:

$$\frac{xx_1}{\beta^2} + \frac{yy_1}{\alpha^2} = 1.$$

3.4 Η Υπερβολή

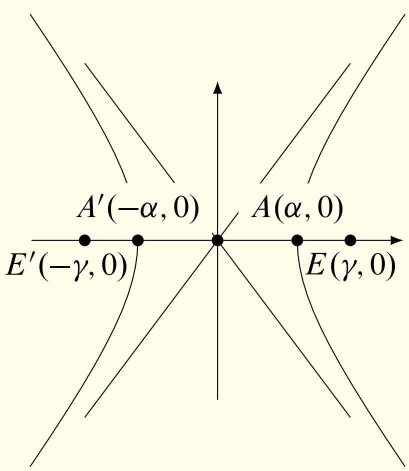
Έστω E' και δύο σημεία ενός επιπέδου. Ονομάζεται **υπερβολή** με εστίες τα σημεία E' και ο γεωμετρικός τόπος C των σημείων του επιπέδου των οποίων η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων από τα E' και E είναι σταθερή και μικρότερη του $(E'E)$.

Η εξίσωση της υπερβολής με εστίες στον άξονα $x'x$:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \quad \text{όπου } \beta = \sqrt{\gamma^2 - \alpha^2}.$$

Εξίσωση εφαπτομένης στο σημείο $M(x_1, y_1)$:

$$\frac{xx_1}{\alpha^2} - \frac{yy_1}{\beta^2} = 1$$



- Σταθερή διαφορά: $|(ME') - (ME)| = 2\alpha$.
- **Εστιακή απόσταση**: $(E'E) = 2\gamma$.
- Κορυφές της υπερβολής A', A, με $(A'A) = 2\alpha$.
- Ασύμπτωτες: $y = \frac{\beta}{\alpha}x$, $y = -\frac{\beta}{\alpha}x$.
- **Εκκεντρότητα** $\epsilon = \gamma/\alpha$.

Τέλος, αν είναι $\alpha = \beta$, τότε η υπερβολή λέγεται **ισοσκελής** και η εξίσωσή της γράφεται:

$$x^2 - y^2 = \alpha^2.$$

Η εξίσωση της υπερβολής με εστίες στον άξονα $y'y$:

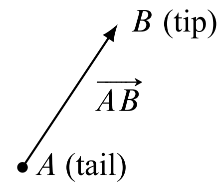
$$\frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1,$$

Εξίσωση εφαπτομένης στο σημείο $M(x_1, y_1)$:

$$\frac{yy_1}{\alpha^2} - \frac{xx_1}{\beta^2} = 1$$

A Vectors

- A vector is a directed line segment with an initial point and a terminal point. The initial point is called the **tail** of the vector, and the terminal point is called the **tip** of the vector.
- If the tail and the tip of a vector coincide, then it is called the null vector ($\overrightarrow{AA} = \vec{0}$).



A position vector is defined as a vector that indicates either the position or the location of any given point with respect to any arbitrary reference point